OSCILLATIONS MECANIQUES LIBRES AMORTIES

Exercice 1

Énoncé :

Le pendule élastique horizontal de la **figure -1-** est constitué par un solde (S) de masse **m=0,2 Kg** soudé à l'une des extrémités d'un ressort (R) à spires non jointives de masse négligeable et de constante de raideur **K=20 N.m^{-1}**, l'autre extrémité est attachée à un support fixe. A l'équilibre, le centre d'inertie (G) du solide (S) coïncide avec l'origine O d'un repère espace horizontal. L'oscillateur est soumis à des forces de frottement visqueux équivalents à une force unique $\vec{f} = -h.\vec{V}$ avec **h=0,1 Kg.s^{-1}**.

1- Établir l'équation différentielle vérifiée par l'élongation x de (G).

2- Montrer que l'énergie totale du système ={solide + ressort} diminue au cours du temps.

3- A l'aide d'un dispositif approprié, on a enregistré le diagramme d'espace de mouvement du solide, le résultat est donné par le graphe de la figure -2-.

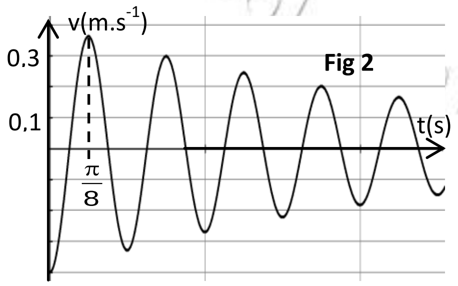
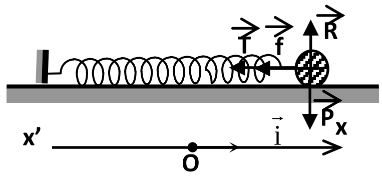


Fig 2

a- Quel est le nom du régime d'oscillations ?

Sachant que la variation de l'énergie totale du système {solide+ ressort} est égal au travail de la force de frottement. Calculer ce travail entre les instants **$t_1=\frac{3\pi}{8}$ s et $t_2=\frac{7\pi}{8}$ s.**

Corrigé :



$$\text{Système} = \{\text{solide}\}$$

$$\text{B.F} : \vec{P}; \vec{R}; \vec{T} \text{ et } \vec{f}$$

$$\text{R.F.D} : \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Projection sur laxe x'x:

$$0 + 0 + T + f = ma$$

$$-Kx - hv = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + Kx = 0}$$

1-

$E = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$ pour voir comment varie E, on la dérive par rapport au temps.

$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}K2x\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}m2v\frac{dv}{dt}$ or $\frac{dx}{dt} = v$ et $\frac{dv}{dt} = a$ donc $\frac{dE}{dt} = Kxv + mva$; $\frac{dE}{dt} = v(Kx + ma)$

D'après l'équation différentielle $Kx + ma = -hv$

$\boxed{\frac{dE}{dt} = v(-hv) = -hv^2 < 0}$ E diminue au cours du temps.

2-

a- Le régime d'oscillations est pseudopériodique.

b- $W(\vec{f}) = E(t_2) - E(t_1)$

❖ Pour $t_1=\frac{3\pi}{8}$; on a v est maximale($v=V_{max}$=0,3 m.s^{-1}) donc $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$ et d'après l'équation différentielle on a :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + Kx = 0 \rightarrow 0 + hV_{max} + Kx = 0 \rightarrow x = -\frac{hV_{max}}{K} = -\frac{0{,}1.0{,}3}{20} = -0{,}0015\,m.$$

$$E(t_1) = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}0{,}2.(0{,}3)^2 + \frac{1}{2}20(0{,}0015)^2 = 9{,}02.10^{-3}\,J$$

❖ Pour $t_2=\frac{7\pi}{8}$; on a v est maximale($v=V_{max}=0,2\ m.s^{-1}$) donc $\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=0$ et d'après l'équation différentielle on a :

$$0+hV_{max}+Kx=0 \rightarrow x=-\frac{hV_{max}}{K}=-\frac{0,1.0,2}{20}=-0,001\ m.$$

$$E(t_2)=E_c+E_p=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Kx^2=\frac{1}{2}0,2.(0,2)^2+\frac{1}{2}20(0,001)^2=4,01.10^{-3}J$$

$$W(\vec{f})=E(t_2)-E(t_1)=4,01.10^{-3}-9,02.10^{-3}=-5,01.10^{-3}\ J$$